JĄDRA CIEPŁA DLA OPERATORA BESSELA

POPULARNONAUKOWY OPIS BADAŃ PROWADZONYCH W RAMACH ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

W otaczającej nas rzeczywistości nieustannie spotykamy się ze zjawiskiem przewodnictwa ciepła przez różne obiekty. Typowymi przykładami z życia codziennego są tutaj łyżeczka nagrzewająca się po włożeniu do kubka gorącej herbaty czy też metalowy pręt do którego przyłożono palnik. Naturalnie nasuwa się tutaj pytanie: jak zmienia się temperatura $T(x,t)$ danego obiektu w zależności od miejsca x na tym obiekcie oraz upływającego czasu t?

Matematyczną próbę odpowiedzi na tak postawiony problem stanowi równanie ciepła. Jest to przykład równania różniczkowego cząstkowego. Oznacza to, że w jego zapisie stosuje się pochodne badanej funkcji temperatury i to zarówno względem zmiennej przestrzennej jak i czasowej. Tym samym opisujemy zmiany temperatury ciała zarówno w czasie jak i przestrzeni. Najprostszy model oparty jest na wspomnianym we wstępie jednowymiarowym (tzn. długim i cienkim, o stałym przekroju poprzecznym) pręcie wykonanym z jednorodnego materiału:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

Tutaj κ jest współczynnikiem przewodnictwa ciepła, c jest ciepłem właściwym, natomiast ρ oznacza gęstość tego materiału. Rozwiązanie ogólne tego równania wyraża się poprzez funkcję wykładniczą wzorem $T(x,t) = \beta(4\pi\alpha t)^{-1/2}\exp\left(-x^2/(4\alpha t)\right)$, gdzie $\alpha = \frac{\kappa}{c\rho}$, natomiast β jest dowolną stałą. Jeśli zażądamy teraz np. aby pręt miał na jednym ze swoich końców określoną temperaturę (warunek brzegowy Dirichleta), to będziemy mogli wyznaczyć wartość β. Tym samym otrzymamy tylko jedną, konkretną funkcję opisującą rozchodzenie się ciepła w takim pręcie. Takie równanie z warunkiem brzegowym Dirichleta nazywamy wówczas zagadnieniem Dirichleta dla równania ciepła.

Niestety taki model zawiera wiele uproszczeń, co zmusza nas do szukania i rozwiązywania znacznie bardziej skomplikowanych równań. Z matematycznego punktu widzenia odpowiada to badaniu rozwiązań zagadnień Dirichleta dla równań ciepła z operatorem drugiego rzędu. Głównym celem przygotowywanej rozprawy doktorskiej będzie zatem analiza równania ciepła dla pewnej klasy takich operatorów. W tym konkretnym przypadku będą to operatory różniczkowe Bessela. Interesować nas będą rozwiazania (czyli tytułowe jądra ciepła) na półprostych, z dodatkowym warunkiem na ich brzegu. Tam gdzie to tylko możliwe postaramy się podać dokładną postać takich rozwiązań. W ogólności jest to bardzo trudne zadanie. W związku z tym skupimy się na uzyskaniu precyzyjnych oszacowań dla tych funkcji.

W istocie zjawisko przewodnictwa ciepła jest typowym przykładem dyfuzji, czyli samorzutnego rozprzestrzeniania się cząsteczek w sposób chaotyczny. Takie procesy mają charakter losowy i można opisywać je za pomocą tzw. procesów stochastycznych. W przypadku równania przewodnictwa ciepła dla operatora Bessela taką rolę odgrywa proces Bessela. Zbadamy pewną ważną podklasę tych procesów a mianowicie tzw. (zabite) mosty Bessela. Będziemy studiować funkcje (gęstości prawdopodobieństw przejścia) opisujące prawdopodobieństwo przejścia cząsteczki w danym czasie z jednego stanu w drugi. Podamy dokładne oszacowania dla takich gęstości. W tym miejscu zaznaczmy, że procesy i mosty Bessela są obecnie coraz częściej wykorzystywane w różnych modelach matematyki finansowej m.in przy wycenie opcji azjatyckich. Dzięki temu wyniki naszych badań powinny być interesujące również dla naukowców z takich dziedzin jak np. ekonomia czy też finanse.

W ostatnim etapie naszych badań postaramy się wykorzystać otrzymane wcześniej wyniki do badania teorii potencjału. Teoria ta wywodzi się z rozważań fizycznych dotyczących m.in pola elektrostatycznego oraz pola grawitacyjnego. Nas interesować będą jej podstawowe obiekty (potencjały oraz funkcje Greena) na obszarach w przestrzeniach hiperbolicznych. Podobnie jak w przypadku jąder ciepła naszym celem będzie podanie jawnych formuł oraz dokładnych oszacowań dla tych obiektów. Z uwagi na interesującą geometrię (np. suma kątów w trójkącie jest mniejsza niż 180°) przestrzenie hiperboliczne są wdzięcznym obiektem badań zarówno fizyków jak i matematyków m.in pojawiają się w słynnej Ogólnej teorii względności Alberta Einsteina.