

Układy dynamiczne podlegają często losowym zaburzeniom wynikającym z zewnętrznych fluktuacji, labilności warunków początkowych czy zmieniających się parametrów. Niniejszy projekt poświęcony jest ergodycznym własnościom takich układów dynamicznych. Zrozumienie ich ergodycznych własności jest ważne z powodów czysto matematycznych i ma także ogromne znaczenie ze względu na możliwe zastosowania w fizyce statystycznej, biologii, chemii i wielu innych dziedzinach nauki.

Ewolucja w czasie losowego układu dynamicznego opisywana jest przez procesy stochastyczne. W przypadku gdy stan systemu w przyszłości zależy od teraźniejszości, a nie zależy od przeszłości, mamy do czynienia z tak zwanymi łańcuchami i procesami Markowa. Teoria łańcuchów/procesów Markowa jest rozwijana od wielu dziesięcioleci. Jedną z najważniejszych kwestii poruszanych w tej teorii związana jest z pytaniem o istnienie miary niezmienniczej i jej stabilność, a więc z sytuacją kiedy procesy startujące z dowolnych rozkładów zbiegają wraz z upływem czasu do miary stacjonarnej. Za klasyczny przykład może służyć słynne H–twierdzenie Boltzmanna mówiące o tym, że proces dąży do stanu, który maksymalizuje entropię.

Najbardziej podstawowym modelem ilustrującym poruszane zjawiska jest tak zwany iterowany układ funkcyjny. Układ taki składa się z rodziny odwzorowań i przyporządkowanych im prawdopodobieństw. Mając iterowany układ funkcyjny możemy badać ewolucję rozkładów zmieniających się w kolejnych krokach na skutek losowego wyboru przekształceń. Cały proces opisuje się przy pomocy odpowiedniego łańcucha Markowa. W teorii takich układów jest wciąż wiele pytań nawet w, wydawałoby się, prostym przypadku układu złożonego z homeomorfizmów na okręgu. Wśród nich nierozstrzygnięta pozostaje kwestia dotycząca tempa zbieżności do stanu stabilnego dla odpowiadającego układowi łańcucha Markowa. Iterowane układy funkcyjne zostały niemalże całkowicie zbadane jedynie w sytuacji, gdy odwzorowania są zwężające lub przynajmniej zwężające w średniej. Tego warunku homeomorfizmy na okręgu nie spełniają. W projekcie zamierzamy zbadać iterowane układy funkcyjne w bardziej ogólnej sytuacji (między innymi działanie odwzorowań Möbiusa na sferze Riemanna, w szczególności grupy Kleina i Fuchsa).

Drugą ważną kwestią, ściśle związaną z pierwszym pytaniem, jest opis geometrycznej struktury miar niezmienniczych. W szczególności poszukiwać będziemy warunków implikujących absolutną ciągłość miary względem miary Lebesguea, bądź jej singularność.

W projekcie zajmować się będziemy asymptotycznym zachowaniem bardziej złożonych układów dynamicznych – na przykład procesów Markowa generowanych przez stochastyczne równania różniczkowe. Spróbujemy odpowiedzieć na pytania analogiczne do tych, które wymieniliśmy przy opisie iterowanych układów funkcyjnych. W szczególności chcielibyśmy podać warunki implikujące centralne twierdzenie graniczne, prawo iterowanego logarytmu i prawo wielkich liczb dla szerokiej klasy procesów stochastycznych. Dodatkowo zamierzamy rozszerzyć technikę funkcji dolnej rozwijaną przez A. Lasotę i J. Yorke’a i pokazać jej użyteczność w badaniu asymptotycznej periodyczności procesów Markowa.