

Nielokalne zagadnienia paraboliczne:

regularność rozwiązań, wybuchy, osobliwości

Cel naukowy projektu

Obiektem badań będą wybrane modele matematyczne motywowane zagadnieniami biologii, medycyny i fizyki, w których pojawiają się nielokalne operatory dyfuzji a także nielokalne i nieliniowe oddziaływania międzycząsteczkowe opisywane zwykle przybliżeniem uśrednionego pola (*mean field*).

Pierwsza grupa modeli obejmuje **układy chemotaksji uogólniające najprostszy model Keller-Segela** (z nielokalnymi operatorami dyfuzji i/lub nieliniową funkcją wrażliwości). Równania chemotaksji służą do wyjaśnienia zjawiska koncentracji komórek/populacji pod wpływem czynników zewnętrznych jak i atraktantów/repelentów wydzielanych przez te same komórki/osobniki. Podstawowe pytania dotyczą kwestii rozwiązalności z mało regularnymi a dowolnie dużymi warunkami początkowymi, przedłużania rozwiązań w czasie i możliwości wybuchu rozwiązania w skończonym czasie. Celem badawczym jest podanie warunków w terminach małości norm pewnych przestrzeni funkcyjnych na nieograniczoną przedłużalność rozwiązań w czasie, i równoczesne podanie warunków dostatecznych wybuchu w przypadku dużych wartości takiej normy funkcyjnej.

Drugie zadanie badawcze wiąże się z **nielokalnym równaniem filtracji w ośrodkach porowatych** rozważanym w obszarach ograniczonych, gdzie istotną trudność sprawia analiza fizycznie uzasadnionych warunków brzegowych dopasowanych do nielokalnych operatorów dyfuzji, np. opisanych różniczkowo-całkowym operatorem ułamkowej potęgi laplasjanu. Istotne pytania dotyczą rozwiązalności zagadnień początkowo-brzegowych, regularności rozwiązań i prędkości rozchodzenia się zaburzeń, a także asymptotycznych profili rozwiązań gdy czas dąży do nieskończoności.

Trzecia grupa zagadnień związana jest z **układami typu reakcji-dyfuzji** (równania paraboliczne z dyfuzją sprzężone z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi lub z równaniami cząstkowymi o dyfuzji zdegenerowanej) opisującymi tworzenie się struktur (*pattern formation*) w wieloskalowych zespołach komórek (np. różnicowania się komórek we wczesnych stadiach tworzenia się tkanek nowotworowych) z uwzględnieniem efektów biochemicznych ale i czysto mechanicznych (upakowanie komórek). Najważniejsze pytania dotyczą mechanizmu tworzenia się osobliwości rozwiązań (prowadzących do wybuchu w skończonym lub nieskończonym czasie) poprzez destabilizację różnych rozwiązań stacjonarnych oraz klasyfikacji rozwiązań tworzących osobliwe struktury w czasie dążącym do nieskończoności.

Znaczenie projektu

Celem badań będzie zrozumienie warunków tworzenia się nowych struktur, osobliwości (punktowych bądź rozłożonych na krzywych i powierzchniach) i zachowania analogicznego do przejść fazowych w mechanice statystycznej.

Oczekiwany efektami badań byłoby zrozumienie (jednego z wielu proponowanych przez biologów) mechanizmów agregacji komórek pod wpływem czynników chemicznych oraz różnicowania się komórek we wczesnych stadiach tworzenia się tkanek nowotworowych lub wzorów na skórze zwierząt.