

Streszczenie popularnonaukowe

Pojęcie *grupy* jest jednym z najbardziej elementarnych i zarazem najważniejszych pojęć w matematyce. Służy ono do opisu symetrii różnorodnych obiektów.

Symetrie mają podstawowe znaczenie w naszym rozumieniu świata, zarówno w makro- jak i w mikroskali. W tym pierwszym przypadku, symetrie czasu i przestrzeni odpowiadają za podstawowe prawa zachowania, będące fundamentem współczesnej fizyki. W skali mikro, symetrie cząstek determinują ich własności chemiczne, co na przykład leży u podstaw intrygujących własności białek.

Z tych powodów *teoria grup*, czyli dziedzina matematyki, której celem jest badanie własności grup, czyli zbiorów symetrii, znajduje szerokie zastosowania. Niniejszy projekt dotyczy badań właśnie w zakresie tej teorii. Jest ona podstawowym narzędziem pracy każdego matematyka, ale używają jej również fizycy, chemicy, biologzy, a w ostatnich latach także informatycy.

Gałąż teorii grup, w której pracujemy, to tak zwana *geometryczna teoria grup* – w skrócie *GTG*. Jest to stosunkowo młoda dziedzina, która rozwinęła się w ostatnich trzydziestu latach, czerpiąc zagadnienia i narzędzia z, między innymi: kombinatorycznej teorii grup, topologii algebraicznej i geometrii różniczkowej. W *GTG* badamy nieskończone grupy posługując się głównie narzędziami geometrycznymi. W dużym przybliżeniu można powiedzieć, że staramy się wyposażyć grupę w pewną strukturę geometryczną, by potem, z właściwości tej ostatniej, wywnioskować algebraiczne własności samej grupy. Taka strategia jest pięknym przykładem sytuacji kiedy dwa, pozornie niepowiązane podejścia do problemu – geometryczne i algebraiczne – zastosowane wspólnie owocują bardzo silnymi narzędziami. W istocie, spojrzenie na grupy jako na obiekty geometryczne pozwoliło dokonać przełomowych odkryć dotyczących ich struktury, na przykład w przypadku automorfizmów zewnętrznych grup wolnych.

Ogólnym celem naszego projektu jest właśnie takie podejście: chcemy wyposażyć pewne szczególne grupy w struktury geometryczne, które pozwolą nam na lepsze zrozumienie tych grup. Naszym głównym narzędziem, za pomocą którego badać będziemy te struktury jest, szeroko rozumiana, *niedodatnia krzywizna*. To pojęcie, mające swoje źródła w geometrii różniczkowej, jest jednym z podstawowych metod współczesnej *GTG*, i źródłem spektakularnych jej sukcesów w ostatnich latach. Warto tutaj wspomnieć o rozwiązaniu kilka lat temu wirtualnej hipotezy Hakena przez Agola i Wise'a, którzy używali *niedodatnio zakrzywionych kompleksów kostkowych*.

Pierwszym obiektem, który chcemy zbadać używając niedodatniej krzywizny są *grupy Artina*. To klasa grup znana od bardzo dawna, intensywnie badana i wciąż tajemnicza. Hipotetycznie grupy Artina mają mnóstwo przyjemnych własności, ale nikt nie potrafi tego dowieść. Co więcej, ciągle próbuje się wyposażyć grupy Artina w jakieś interesujące niedodatnio zakrzywione struktury geometryczne, ale udaje się to tylko w bardzo specyficznych przypadkach. Oryginalność naszego podejścia polega na użyciu nowych, kombinatorycznych wariantów niedodatniej krzywizny. W ciągu ostatnich kilku lat rozwinęliśmy znacząco teorię opisującą te narzędzia i wierzymy, że jesteśmy gotowi jej teraz skutecznie użyć. Po wyposażeniu grup Artin w strukturę niedodatniej krzywizny użyjemy jej do pokazania nowych algebraicznych, algorytmicznych, i geometrycznych w dużej skali własności tych grup.

Kolejnym celem projektu jest badanie interesujących przestrzeni topologicznych związanych z *grupami hiperbolicznymi w sensie Gromowa* i z *grupami Coxetera* – ważnymi klasami grup o niedodatniej krzywiznie kombinatorycznej. Przestrzenie te, zwane *brzegami Gromowa* i *brzegami CAT(0)* stanowią jeden z pomostów między teorią grup, a topologią i analizą na przestrzeniach metrycznych. W chwili obecnej nie jest jasne jakie przestrzenie topologiczne mogą się tu pojawiać. Chcemy odpowiedzieć na to pytanie.

Ponadto planujemy użyć niedodatniej krzywizny kombinatorycznej do uzyskania nowych metod konstrukcji nieskończonych grup o interesujących własnościach. Chcemy również pokazać, że "większość" nieskończonych grup dopuszcza strukturę niedodatniej krzywizny kombinatorycznej. Innymi słowy, planujemy pokazać, że bycie niedodatnio zakrzywioną jest "typowym zjawiskiem" wśród grup nieskończonych.