

Marcin Preisner. Streszczenie popularnonaukowe projektu badawczego.

Analiza harmoniczna związana z operatorami różniczkowymi, różnicowymi i różniczkowo-różnicowymi

Klasyczna analiza harmoniczna na \mathbb{R}^d jest związana z operatorem Laplace'a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}.$$

Z operatorem Δ związana jest półgrupa operatorów liniowych $H_t f = h_t * f$, gdzie $h_t(x)$ jest słynnym jądrem Gaussa-Weierstrassa danym wzorem

$$h_t(x) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Z operatorem Δ i półgrupą H_t jest związanych wiele ważnych obiektów wykorzystywanych m.in. w równaniach różniczkowych, analizie matematycznej, harmonicznej lub fourierowskiej. Mamy tu na myśli: funkcje harmoniczne, transformatę Fouriera, przestrzenie Sobolewa, operatory maksymalne, przestrzenie Hardy'ego, transformaty Hilberta/Riesza, potencjały Riesza lub Bessela, radialne mnożniki fourierowskie, przestrzenie BMO.

Wiele z tych obiektów możemy zdefiniować lub znaleźć ich odpowiedniki dla operatorów innych niż Δ . W niniejszym projekcie będziemy badali różne operatory różniczkowe (np. operatory Bessela, Laguerre'a, Grushina), różniczkowo-różnicowe (operatory Dunkla) oraz różnicowe (dyskretny operator Laplace'a). Wszystkie te operatory generują półgrupy operatorów liniowych działających na przestrzeniach $L^p(X, d, \mu)$, gdzie X jest przestrzenią, d - metryką na tej przestrzeni, a μ - miarą nieujemną.

Jednymi z głównych obiektów naszego zainteresowania będą przestrzenie Hardy'ego H^p związane z wspomnianymi wyżej i innymi operatorami. Naszym celem jest podanie charakteryzacji tych przestrzeni poprzez: funkcje maksymalne, rozkłady atomowe, transformaty Riesza i, w przypadku operatorów Dunkla, układy sprzężonych funkcji harmonicznych. Ponadto badali będziemy ograniczoność pewnych operatorów na L^p oraz H^p , w tym operatorów mnożnikowych oraz transformat Hilberta/Riesza.

Analiza harmoniczna związana z operatorami, które będziemy badać w niniejszym projekcie, cieszy się zainteresowaniem w wielu ośrodkach naukowych na świecie. W ostatnich latach obserwujemy znaczący wzrost zainteresowania tą tematyką. Twierdzenia uzyskane w ramach projektu wpłyną znacząco na rozwój teorii przestrzeni funkcyjnych, operatorów i półgrup operatorów liniowych. W ramach realizacji projektu zamierzamy współpracować z matematykami z różnych ośrodków, m.in. z Polski, Hiszpanii i Francji.