Program optymalności w problemach homomorfizmu grafów

Paweł Rzążewski

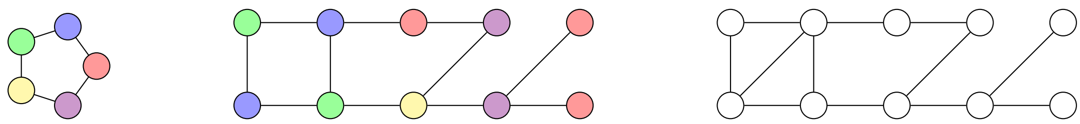
Wraz z rozwojem informatyki, naukowcy opracowali wiele szybkich algorytmów dla ważnych problemów, zarówno teoretycznych, jak i pochodzących z zastosowań. Istnieje jednak duża rodzina łatwych do sformułowania problemów, których nadal nie potrafimy efektywnie rozwiązywać. Co gorsza, nie potrafimy też pokazać, że szybkie algorytmy dla tych problemów nie istnieją. Zazwyczaj wyniki dotyczące trudności problemów mają postać: jeśli nasz problem da się rozwiązać efektywnie, to wiele innych problemów, dla których dotąd nie znaliśmy szybkich algorytmów, również da się rozwiązać efektywnie. W ten sposób postęp w rozwiązywaniu naszego problemu oznaczałby znaczący postęp w informatyce.

Dlatego naukowcy poświęcają wiele uwagi badaniu granicy między problemami „łatwymi" i „trudnymi", w nadziei, że uda nam się lepiej zrozumieć, które cechy problemów mogą być wykorzystane w konstrukcji szybkich algorytmów.

Wiele takich problemów, także pochodzących z zastosowań, można wygodnie sformułować jako problemy grafowe. Przypuśćmy na przykład, że mamy dany pewien zbiór obiektów. Wiemy, że istnieją konflikty pomiędzy niektórymi parami obiektów. Naszym zadaniem jest znalezienie takiego podziału obiektów na najmniejszą możliwą liczbę podzbiorów, aby w obrębie każdego podzbioru tego podziału nie było żadnych konfliktów. W języku grafów, obiekty będą reprezentowane przez wierzchołki, a krawędzie będą łączyły obiekty, między którymi występuje konflikt. Chcemy podzielić wierzchołki grafu na jak najmniej podzbiorów takich, że żadne dwa wierzchołki w tym samym podzbiorze nie sąsiadują ze sobą. Taki „bezkonfliktowy" podział nazywany jest *poprawnym kolorowaniem* grafu G, zobacz Rys. 1.

Rysunek 1: Dwa grafy poprawnie pokolorowane przy użyciu najmniejszej możliwej liczby kolorów.

Pojęcie poprawnego kolorowania grafów można uogólnić do tak zwanych H-kolorowań, gdzie oprócz grafu G, mamy także dany graf H, który opisuje możliwe relacje między kolorami. Możemy myśleć o wierzchołkach grafu H jako o kolorach; szukamy kolorowania wierzchołków grafu G w taki sposób, że każda para sąsiadów w G zostaje przypisana parze sąsiadów w H, patrz Rys. 2. Zauważmy, że jeśli H ma k wierzchołków, z których każde dwa połączone są krawędzią, to H-kolorowanie odpowiada poprawnemu kolorowaniu na co najwyżej k kolorów.



Rysunek 2: Graf H, H-kolorowanie pewnego grafu i graf, który nie ma H-kolorowania.

Okazuje się, że wiele naturalnych problemów grafowych można wyrazić jako znajdowanie szczególnych rodzajów H-kolorowania, dla różnych grafów H. Z tego powodu badanie H-kolorowań może rzucić nowe światło na wiele znanych problemów: dzięki szerszej perspektywie łatwiej dostrzeć podobieństwa między problemami, które na pierwszy rzut oka mogą wydawać się zupełnie niezwiązane ze sobą.

Nawet dla małych grafów H, np. trójkąta, problem stwierdzenia, czy dany graf ma H-kolorowanie, jest trudny obliczeniowo. Może się jednak stać znacznie prostszy, jeśli będziemy rozpatrywać tylko pewne szczególne grafy G, np. takie, które nie zawierają pewnej określonej struktury.

Celem projektu jest dokładne zbadanie złożoności problemów znajdowania wariantów H-kolorowania dla różnych grafów H. Chcemy zrozumieć, jakie ograniczenia należy nałożyć dla graf G, aby uzyskać problem, który można rozwiązać efektywnie. Szczególnie interesuje nas uzyskanie pełnej charakteryzacji grafów H, dla których H-kolorowania mogą być efektywnie znalezione dla różnych klas grafów G.