

Badania ilościowe teorii mnogości *Czy ZF i ZFC są asymptotycznie równoważne?*

Metody probabilistyczne stanowią klucz do rozwiązywania obliczeniowo trudnych problemów informatycznych. Paradigmat probabilistyczny zapewnia możliwość badania obiektów typowych zamiast wszystkich. W zamian za brak precyzji otrzymujemy większą prędkość działania algorytmów. Badane problemy mogą być sformułowane przy użyciu pojęcia „losowej formuły” czy też „losowego termu”. Naturalną formalizacją „losowości” jest definicja oparta na jednostajnych rozkładach prawdopodobieństwa na zbiorach skończonych obiektów o ograniczonym rozmiarze. W tym sensie definicja ta odpowiada pojęciu gęstości, używanej m.in. w teorii języków. Dla każdego zbioru formuł A miarą częstotliwości występowania obiektów jest ułamek, będący stosunkiem liczby elementów zbioru A o rozmiarze n , a liczby wszystkich rozważanych obiektów o rozmiarze n . Wartość granicy tego ciągu nazywamy gęstością zbioru A . Problemów dostarczają badania nad ilościowymi własnościami rachunku predykatów oraz rachunku lambda. Możemy tu stawiać ciekawe pytania ilościowe. Przykładowo, jak wiele różnych dowodów rozmiaru n ma formuła rachunku zdań, czy też jak wiele programów rozmiaru n ma własność stopu? Okazuje się również, że struktury w których występuje wiązanie zmiennych są niezwykle ciekawe z punktu widzenia kombinatoryki. Najprostszy taki strukturami są formuły logiki predykatów lub lambda termy z lambda abstrakcją jako wiązaniem. W języku predykatów z jednym binarnym symbolem predykatywnym sformułowana jest teoria mnogości Zermela-Fraenkla. Teorie tę można zbudować w języku rachunku predykatów z jednym binarnym symbolem predykatywnym interpretowanym jako \in dodając klasyczne aksjomaty ZF. Frapujące jest pytanie o gęstość zbioru dowodliwych formuł tej teorii w zbiorze wszystkich formuł języka w jakim są one wyrażone. Badania grantu będą prowadzone w następujących dziedzinach:

- (1) **Pokazać istnienie gęstości dla teorii mnogości ZF zapisanej w rachunku predykatów z jednym symbolem binarnym.**
- (2) **Znaleźć relacje ilościowe między teorią ZF Zermela-Fraenkla a teorią ZFC Zermela-Fraenkla z aksjomatem wyboru.** Będziemy poszukiwali ustalenia stosunków ilościowych dla obydwu teorii. Pozwoli to na sformułowanie tezy o ilościowym wpływie aksjomatu wyboru na liczbę dowodzonych twierdzeń. Zakładając, że gęstości **ZFC** oraz **ZF** istnieją i są dodatnie będziemy starali się zbadać czy asymptotycznie istnieje różnica między liczbą dowodliwych twierdzeń w obydwu teoriach. Chcemy wykazać, że asymptotycznie **nie istnieje** różnica między liczbą dowodliwych twierdzeń w obydwu teoriach. Wcześniej należy rozstrzygnąć następujące bazowe problemy:
- (3) **Zliczanie formuł rachunku kwantyfikatorów. Badania nad ich gęstością.**
- (4) **Ile jest asymptotycznie formuł rachunku logicznego o określonym rozmiarze?**
- (5) **Jaka jest gęstość zbioru formuł w rachunku z jednym binarnym predykatem.**