POPULARNONAUKOWE STRESZCZENIE PROJEKTU

Jednym z najważniejszych osiągnięć logiki jest aksjomatyzacja znacznych części matematyki, czyli sformułowanie intuicyjnie oczywistych zasad z których można wyprowadzić znane twierdzenia algebry, analizy, geometrii czy innych kanonicznych działów matematyki. Takie układy aksjomatów, które pozwalają na odtworzenie reszty matematyki lub przynajmniej znacznych jej części nazywa się *teoriami podstawowymi*. Ich badanie stanowi jeden z najważniejszych obszarów logiki.

Oprócz takich obiektów jak liczby naturalne, trójkąty, czy grafy skończone, teorie podstawowe są też w stanie opisywać własności obiektów składniowych, takich jak ciągi znaków ze skończonego alfabetu (czyli słowa), ciągi słów (czyli zdania) lub ciągi zdań (czyli dowody). Co więcej, teorie podstawowe są w stanie zdefiniować, które ze zdań są ich aksjomatami. Ponieważ dowody w rozważanych teoriach podstawowych dopuszczają użycie jedynie pewnego z góry określonego zestawu reguł, potrafimy stwierdzić, czy dany ciąg zdań spełnia te reguły, czyli czy jest poprawnie skonstruowanym dowodem w danej teorii. W efekcie w teoriach podstawowych można przeprowadzać rozumowania dotyczące samych tych teorii.

Teorie podstawowe są w stanie zdefiniować ciągi zdań będące poprawnymi dowodami *z aksjomatów danej teorii*. Pozwala to zdefiniować twierdzenie danej teorii jako zdanie posiadające dowód. Można więc pytać, czy dana teoria jest w stanie udowodnić, że niektóre zdania są jej twierdzeniami, a inne – na przykład zdania jawnie sprzeczne – *nie są* jej twierdzeniami. Okazuje się, że *żadna* teoria podstawowa nie jest w stanie tego zrobić – *nie jest w stanie* udowodnić, że nie da się z niej wyprowadzić oczywistego absurdu. Każda teoria podlega temu podstawowemu ograniczeniu poznawczemu. Wynik ten, znany jako drugie twierdzenie Gödla, stanowi jedno z fundamentalnych osiągnięć logiki, a prawdopodobnie również całej nauki w ogóle.

Mimo, że żadna teoria podstawowa nie jest w stanie udowodnić, że nie da się z niej wywieść absurdu, wydaje się, że przyjmując daną teorię, powinniśmy jednocześnie przyjąć, że ta teoria jest niesprzeczna. Niesprzeczność danej teorii nie może jednak być jej twierdzeniem, czyli jej *jawnym zobowiązaniem*. Z drugiej strony wydaje się, że założenie o niesprzeczności teorii, choć nie wynika z samej teorii, stanowi jednak jej konsekwencję w silnym sensie. Nie można racjonalnie przyjąć jakiejś teorii i jednocześnie uznawać, że ta teoria jest sprzeczna. Nie jest to kwestia jedynie naszej decyzji lub przyjętej konwencji. W takim wypadku mówimy, że niesprzeczność jest *zobowiązaniem niejawnym*.

Klasyczne prace Alana Turinga i Solomona Fefermana odpowiadały na pytanie, co jeszcze można udowodnić przy założeniu, że wraz z przyjęciem dowolnej teorii powinno się założyć dodatkowo jej niesprzeczność. Okazało się, że ta metoda rozszerzania teorii, rozumiana jako procedura dodawania nowych aksjomatów, daje ten sam wynik, co zastosowanie kilku innych metod, również bardzo naturalnych, które wydają się nie mieć ze sobą wiele wspólnego na pierwszy rzut oka.

W naszych badaniach staramy się przede wszystkim ustalić, jakie są ogólne mechanizmy powstawania zobowiązań niejawnych teorii podstawowych. Innymi słowy, staramy się opisać precyzyjny i matematycznie uchwytny sens, w jakim akceptacja danej teorii zobowiązuje nas do przyjęcia np. jej niesprzeczności. Ponadto w naszym projekcie zamierzamy badać inne możliwe rodzaje niejawnych zobowiązań teorii, które nie są tak dobrze zrozumiane, jak zdania o niesprzeczności i pokrewne zasady.

Podstawowym przykładem są tu twierdzenia teorii prawdy. Jeśli akceptujemy jakąś teorię, to wydaje się, że akceptujemy też na przykład, że aksjomaty tej teorii są prawdziwe. W celu *wyrażenia myśli* o prawdziwości aksjomatów danej teorii, musimy przyjąć szereg założeń, które opisują, jakie własności posiada pojęcie prawdy. Przykładem takiej własności jest tak zwana kompozycyjność, czyli zasada, że prawdziwość zdania zależy od prawdziwości jego składowych. Na przykład jeśli zdanie *A* jest prawdziwe oraz zdanie *B* jest prawdziwe, to zdanie '*A oraz B*' też jest prawdziwe. Istnieje wiele innych podobnych zasad badanych w tym kontekście i często nie jest do końca jasne, jaka jest ich siła. „Siła" może być tu rozumiana na kilka różnych, precyzyjnie zdefiniowanych sposobów, które wspólnie starają się uchwycić to, że dana teoria (w naszym wypadku teoria uzyskana przez dodanie predykatu prawdy) „mówi więcej" niż druga teoria (w naszym wypadku teoria bazowa sprzed dodania do niej tego predykatu). Opisanie siły zobowiązań niejawnych teorii (w tym zasad charakteryzujących pojęcie prawdy dla języka teorii) jest jednym z podstawowych celów projektu.