Arytmetyczne i geometryczne podejście do asymptotycznych niezmienników w algebrze i geometrii algebraicznej

streszczenie popularnonaukowe

Projekt dotyczy związków pomiędzy arytmetycznymi i geometrycznymi właściwościami rozmaitości oraz bada pewne asymptotyczne niezmienniki związane z rozmaitościami. Mówiąc bardziej szczegółowo, *rozmaitość* to zbiór rozwiązań równania wielomianowego. Na przykład równanie

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

można interpretować jako równanie okręgu o promieniu z na płaszczyźnie euklidesowej ze współrzędnymi x oraz y. Swoją postacią równanie przypomina Twierdzenie Pitagorasa. Dobrze wiadomo, że istnieją trójkąty prostokątne, których wszystkie boki są liczbami całkowitymi. Najbardziej znany taki trójkąt ma boki długości $(3, 4, 5)$, ale istnieją też inne, na przykład $(5, 12, 13)$. Naturalne jest pytanie, ile jest takich (całkowitoliczbowych) rozwiązań równania (1). Okazuje się, że jest nieskończenie wiele, i ich struktura jest dobrze opisana.

Wprowadzając małą zmianę do równania (1) otrzymujemy równanie

$$x^3 + y^3 = z^3 \tag{2}$$

lub bardziej ogólnie

$$x^n + y^n = z^n \tag{3}$$

dla $n \geqslant 3$. Co można powiedzieć teraz o rozwiązaniach w liczbach całkowitych? To pytanie jest znane jako Ostatnie Twierdzenie Fermata. Okazuje się, że równanie (3) nie ma dla $n \geqslant 3$ rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych. Zostało to udowodnione stosunkowo niedawno przez Andrew Wilesa.

Można zacząć rozważania z innego punktu widzenia. Mając dany skończony zbiór (całkowitoliczbowych) punktów na płaszczyźnie, pytamy jaki jest najmniejszy stopień krzywej przechodzącej przez te punkty co najmniej raz? Bardziej ogólnie, jaki jest ten stopień, gdy każdy punkt chcemy odwiedzić co najmniej 2 razy? Albo n razy dla $n \geqslant 1$? Zwiększanie parametru n w tym pytaniu jest postrzegane jako podejście asymptotyczne, o którym mowa w tytule projektu. Oczekujemy, że istnieje ogólna odpowiedź na to pytanie, zależna od liczby punktów, która jest spełniona dla wszystkich n wystarczająco dużych (dla małych wartości n mogą zachodzić wyjątki).

Konkretnym celem projektu jest rozwiązanie dwóch hipotez, które pozostają otwarte od ponad 30 lat. Niestety, ich sformułowanie jest zbyt złożone, by przytaczać je tu. Niemniej jednak warto zauważyć, że ich rozwiązanie doprowadziłoby do znaczącego postępu w teorii a tym samym skutkowało zwiększeniem zakresu wiedzy będącej w dyspozycji ludzkości.