

ALGORYTMICZNY NULLSTELLENSATZ

Głównym celem projektu jest konstrukcja efektywnych algorytmów dla pewnych problemów kolorowania grafów przy użyciu ulepszonej metody wielomianowej Alona i Tarsi'ego. Podstawowa idea jest prosta: Każdy graf można reprezentować wielomianem wielu zmiennych w taki sposób, że "nie-pierwiastki" tego wielomianu odpowiadają poprawnym kolorowaniom grafu. Słynne Kombinatoryczne Twierdzenie o Zerach (ang. Combinatorial Nullstellensatz) dostarcza warunku wystarczającego dla istnienia kolorowań (z dowolnie przypisanych list kolorów). Ten warunek sprowadza się do nieznikania jednomianu o odpowiednio ograniczonych wykładnikach, w dużej mierze podobnie jak w przypadku znanego faktu, że wielomian (jednej zmiennej) nie może mieć więcej pierwiastków (nad dowolnym ciałem) niż jego stopień. Na przykład, wykazanie, że wielomian grafu zawiera nieznikający jednomian o co najwyżej sześciennych wykładnikach implikuje jego 4-wybieralność.

Naszym celem jest przekształcenie tej czysto algebraicznej własności wielomianu grafu w efektywny algorytm znajdujący pożądane kolorowanie z danych list kolorów (lub wykazanie niemożliwości takiego wyniku). To zadanie jest bardzo trudne (lub wręcz niemożliwe) w ogólności, ale my skupiamy się na wybranych rodzinach grafów, dla których metoda wielomianowa okazała się ostatnio nieoczekiwanie skuteczna. Są to głównie grafy planarne (z dodatkowymi restrykcjami gęstościowymi lub strukturalnymi) lub pokrewne do nich (grafy 1-planarne lub grafy biplanarne). Na przykład, udowodniono ostatnio, że każdy graf planarny może stać się 4-wybieralny po usunięciu odpowiedniego skojarzenia. Ponieważ dowód opiera się na wielomianach grafów, konkluzja twierdzenia jest znacznie silniejsza i implikuje wersję on-line problemu kolorowania listowego.

Inna zaleta metody wielomianów polega na tym, że powiązany zagadnieniem kolorowania problem zliczania poprawnych kolorowań jest w pewnych sytuacjach łatwiejszy do rozwiązania. W rzeczywistości, bezpośrednie zastosowanie istniejących narzędzi algebraicznych często daje lepsze oszacowania na liczbę kolorowań z list niż dotąd znane. To wspiera naszą nadzieję na otrzymanie efektywnych algorytmów w podobnych sytuacjach, przynajmniej w wersji randomizowanej.

Podsumowując, naszym zamiarem jest wykonanie systematycznych badań nad możliwościami i ograniczeniami metody wielomianowej w kolorowaniu grafów. Jest ciekawym zjawiskiem, że choć skuteczne użycie tej metody nie gwarantuje istnienia efektywnego algorytmu, to jednak istnieją problemy, w których dostarcza ona wystarczającego wglądu w strukturę problemu aby ostatecznie uzyskać rozwiązanie o dobrych walorach algorytmicznych. Jest raczej nieprawdopodobne żeby udawało się to zawsze, chcielibyśmy jednak znaleźć dokładniejsze warunki prowadzące w określonych sytuacjach do algorytmicznych dolnych ograniczeń. Po drodze do tego celu planujemy uzyskać postęp w kilku czysto kombinatorycznych problemach dotyczących kolorowania listowego, jak np. w problemie kolonii księżycowych (ang. the Earth-Moon problem) czy w problemie wybieralności grafów 1-planarnych.