

BRZEGI GRUP HELLY'EGO

streszczenie popularnonaukowe

Grupa to podstawowe pojęcie matematyki, które służy do wyrażania symetrii różnych obiektów.

W geometrycznej teorii grup bada się związki pomiędzy grupami a przestrzeniami (spełniającymi pewne geometryczne warunki), na których działają (wyrażając ich symetrie). W ten sposób powstaje połączenie pomiędzy dwiema dziedzinami matematyki – geometrią i algebrą, które umożliwia lepsze zrozumienie grup poprzez badanie przestrzeni i *vice versa*. Dziedzina ta ma swoje początki w latach 80-tych XX wieku, czerpie inspiracje z kombinatorycznej teorii grup, topologii algebraicznej i geometrii różniczkowej.

Nasz projekt wpisuje się w ogólny trend badania grup działających na przestrzeniach niedodatnio zakrzywionych. Pojęcie niedodatniej krzywizny ma swoje korzenie w geometrii różniczkowej; wiąże się ono z tym, że kule w przestrzeniach o niedodatniej krzywiznie są wypukłe.

W badaniach planujemy skupić się na grupach działających na grafach spełniających własność Helly'ego lub na przestrzeniach injektywnych, lub, w większej ogólności, na przestrzeniach z tzw. bicombingiem (tj. takich, dla których istnieje wybór przyporządkowujący każdej parze punktów pewną krzywą je łączącą o minimalnej długości, tzw. geodezyjną, który w sposób ciągły zależy od tej pary i spełnia pewne dodatkowe warunki), które to można traktować jako przykłady klas przestrzeni niedodatnio zakrzywionych. Jest to stosunkowo nowy kierunek badań w geometrycznej teorii grup, jednak, co ciekawe, samo pojęcie injektywności i grafów Helly'ego pojawiała się wielokrotnie w rozwoju matematyki, w różnych jej dziedzinach, definiowane na różne sposoby, które okazywały się być równoważne. Injektywność przestrzeni powoduje, że posiada ona bicombing, który zdaje się upodabniać ją, w pewnym sensie, do przestrzeni spełniających inny warunek na niedodatnią krzywiznę zwany CAT(0), który polega na tym, że trójkąty złożone z segmentów geodezyjnych są nie grubsze od trójkątów na płaszczyźnie o bokach tych samych długości.

Projekt skupia się na badaniu brzegów grup (w nieskończoności). W uproszczeniu, powstają one w następujący sposób. W myśl głównej idei geometrycznej teorii grup, zamiast grupy możemy rozważyć przestrzeń, na której ona działa (w kontrolowany sposób). W tej przestrzeni wybieramy pewien punkt i patrzymy na punkty w ustalonej odległości od niego, można o nich myśleć jako „brzegu” zbioru wszystkich punktów w odległości nie mniejszej, niż ta ustalona. Można zaobserwować, że biorąc coraz większą odległość, widziany przez nas obrazek coraz bardziej upodabnia się do pewnego bardzo regularnego, a jednocześnie skomplikowanego tworu – brzegu grupy.

Celem projektu jest rozpoczęcie systematycznych badań brzegów w przypadku grup działających na grafach Helly'ego, przestrzeniach injektywnych i przestrzeniach z bicombingiem. Tematyka ta jest nowa, pojęcia w niej używane nie zostały dokładnie zdefiniowane ani zbadane. Dzięki lepszemu zrozumieniu brzegów można dokładniej zrozumieć znane przykłady grup oraz tworzyć nowe, o potencjalnie egzotycznych własnościach.