

WIĘKSZOŚCIOWE KOLOROWANIE GRAFÓW

Celem projektu jest uzyskanie znaczącego postępu w kilku problemach otwartych dotyczących kolorowania grafów z lokalnym warunkiem poprawności określonym następująco. W każdym kolorowaniu wierzchołków grafu mogą wystąpić krawędzie o końcach różnokolorowych (*dobrze*) oraz krawędzie monochromatyczne (*złe*). Jeżeli przy każdym wierzchołku liczba złych krawędzi nie przekracza liczby dobrych krawędzi, to takie kolorowanie nazywamy *większościowym*.

Łatwo udowodnić, że każdy skończony graf można pokolorować większościowo przy użyciu jedynie dwóch kolorów (wystarczy wziąć kolorowanie minimalizujące całkowitą liczbę złych krawędzi). Przypuszczenie, że podobne twierdzenie zachodzi dla grafów przeliczalnych nosi nazwę *Hipotezy o Nieprzyjaznym Podziale* i stanowi jedno z największych wyzwań tej tematyki. Naszym zamiarem jest zaatakowanie tej hipotezy oraz kilku zagadnień pokrewnych, w tym wersji *listowej*, *ułamkowej* i *skierowanej* (oraz wszelkich możliwych wariantów łączonych). Na przykład, w wersji listowej pytamy o minimalną wartość k , dla której każdy graf przeliczalny jest większościowo k -wybieralny (kolor wierzchołka musi pochodzić z dowolnie narzuconej listy rozmiaru k). Wersja skierowana dotyczy kolorowania większościowego digrafów, w którym warunek większości odnosi się do krawędzi wychodzących z wierzchołka. Skierowana wersja Hipotezy o Nieprzyjaznym Podziale mówi, że każdy digraf przeliczalny jest większościowo 3-kolorowalny. W tym przypadku nie wiemy nawet czy jest to prawdą dla digrafów skończonych. Z kolei w wersji ułamkowej pytamy o jak najmniejszą wartość ułamka k/r , przy której możliwe jest przypisanie każdemu wierzchołkowi grafu listy r kolorów spośród k dostępnych w taki sposób, by każde kolorowanie z tych list było większościowe. Wykazanie, że ułamek ten jest dla grafów przeliczalnych dowolnie bliski 2, lub chociaż mniejszy niż 3, byłoby istotnym krokiem w kierunku Hipotezy o Nieprzyjaznym Podziale.

Nasz projekt ma również naturalny i bardziej ogólny cel: uzyskanie nowych metod badania problemów kolorowania grafów z defektem określonego typu i stopnia. Można spodziewać się, że te techniki pozwolą uzyskać przybliżone wersje rozmaitych hipotez w tej dziedzinie, w których dopuszcza się wystąpienie źle pokolorowanej części struktury spełniającej określone restrykcje. To może rzucić nowe światło na trudność pewnych długo nierozwiązanych problemów otwartych w dziedzinie kolorowania grafów.