Popularne streszczenie projektu badawczego

Logiczno-filozoficzne podstawy geometrii i topologii

Geometryczna refleksja nad przestrzenią towarzyszy ludzkości od czasów starożytnych. Pierwej, w Mezopotamii i Egipcie, miała ona podłoże pragmatyczne. Niosła pomoc ówczesnym inżynierom we wznoszeniu budowli i zachowywaniu powierzchni pól zalewanych przez wody Nilu. Zainteresowanie teorią dla niej samej było wówczas, wedle naszej wiedzy, nikłe.

Później, do rangi przedmiotu godnego badań dla nich samych podnieśli geometrię starożytni Grecy. Istotnym nie było już tylko to, do czego można ją było zastosować, ale przede wszystkim co można powiedzieć o naturze i wzajemnych powiązaniach obiektów takich jak punkty, linie i figury. Wraz z geometrią jako nauką czystą narodziła się metoda aksjomatyczna, której esencją jest dowodzenie złożonych faktów na podstawie możliwie najprostszych, nie budzących wątpliwości założeń zwanych aksjomatami.

Najpełniejsze świadectwo metody w postaci stosowanej przez Greków znajdujemy w *Elementach* Euklidesa. Bez większych zmian—dając w ten sposób świadectwo wielkiej przenikliwości starożytnych—dotrwała ona do wieku XIX naszej ery. Wówczas, matematycy w osobach Jánosa Bolyaiego, Carla Friedricha Gaussa i Nikołaja Łobaczewskiego dali początek systemom geometrii, które były na tyle rewolucyjne, że zasłużyły na miano *nieeuklidesowych*.

Klikadziesiąt lat wcześniej, jeszcze w wieku XVIII, inny wielki umysł, Leonhard Euler, formułując odpowiedź na pytanie: *czy można przespacerować się po całym Królewcu przechodząc tylko raz przez każdy z siedmiu jego mostów nad Pregołą?*, położył podwaliny pod teorię grafów oraz, co bardziej dla nas istotne, *topologię*.

Geometria, której podstawy przyswajamy od wczesnych etapów edukacji szkolnej, dotyczy takich własności przestrzeni jak odległość, kształt, rozmiar czy podobieństwo jej kawałków. Porównania dotyczą zawsze obiektów, które są sztywne: możemy je obracać i skalować, ale nie możemy ich wyginać. Tak jakby zbudowane były z całkowicie nieplastycznego materiału. Topologia z kolei, bada te własności przestrzeni i jej fragmentów, które wiążą się z gięciem, ściskaniem i rozciąganiem. Kolokwialnie rzecz ujmując, topologia jest teorią obiektów zbudowanych z gumy.

Odkrycie geometrii nieeuklidesowych i topologii, oraz procesy myślowe, które do tych odkryć doprowadziły, spowodowały, że oczy filozofów, logików i matematyków zaczęły postrzegać rozmaite teorie przestrzeni nie tylko jako narzędzia, które dostarczają nam odpowiedzi na pytania o jej naturę, ale jako swoiste obiekty badań. Zadano pytania o status samych teorii, ich strukturę logiczną, bazę pojęciową, aksjomaty i filozoficzny trzon.

Podstawowym dla całej geometrii i topologii jest pojęcie *punktu*, naiwnie rozumiane jako odnoszące się do mikroskopijnych rozmiarów kropek. Z pozoru niewinne, zaczęło z czasem uwierać logików i matematyków nie stroniących od filozofii. Niektórzy z nich, jak Bertrand Russell czy Alfred N. Whitehead, podjęli próby skonstruowania teorii przestrzeni, w których punktów nie przyjmowano jako elementarnych jej składników, ale konstruowano je wykorzystując owej przestrzeni kawałki. W ten sposób, w pierwszych trzech dziesięcioleciach ubiegłego wieku, narodziły się geometrie i topologie *bezpunktowe*.

W tym samym czasie amerykański logik Clarence Irving Lewis rozpoczął prace nad systemami logik opartymi na pojęciach *możliwości* i *konieczności*, tzw. logikami modalnymi. Traktowane z początku podejrzliwie, gdyż pozbawione przekonującej interpretacji, logiki modalne znalazły sojusznika w topologii. W latach czterdziestych ubiegłego stulecia Alfred Tarski oraz John McKinsey pokazali, że pojęcia możliwości i konieczności mają eleganckie znaczenie w przestrzeniach topologicznych. Tarski i McKinsey dowiedli, że pewne systemy logiki modalnej są—w pewnym ścisłym matematycznym znaczeniu—logicznym rusztowaniem niektórych topologii.

Niniejszy projekt podąża zarówno śladami Russella i Whiteheada, jak i tymi, które pozostawili po sobie McKinsey i Tarski. Z jednej strony jego celem jest znalezienie systemu logiki modalnej, który leży u podstaw jednego z elementarnych jednowymiarowych systemów geometrii, opartych na przestrzennej relacji *leżenia między*. Z drugiej, bada własności i konsekwencje teorii topologicznych, w których punkty nie są zakładane, ale konstruowane. Z trzeciej wreszcie strony, przygląda się jak dwie zdolności poznawcze człowieka: idealizowanie i abstrahowanie, wpływają na to, co możemy w danych systemach geometrii powiedzieć, a czego wyrazić w nich nie sposób.