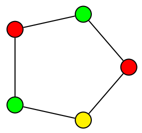
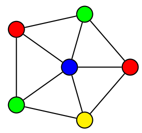
Uogólnienia problemu kolorowania w grafach z zabronionymi strukturami

Karolina Okrasa

Jednym z najlepiej zbadanych problemów grafowych jest problem poprawnego *k-kolorowania grafu*: pytamy, czy można przypisać wierzchołkom grafu k kolorów w taki sposób, aby żadne dwa sąsiadujące ze sobą wierzchołki nie otrzymały tego samego koloru. Poniższy przykład pokazuje poprawne kolorowanie grafów: na 3 kolory (po lewej) i na 4 kolory (po prawej). Łatwo sprawdzić, że grafu po prawej stronie nie pokolorujemy poprawnie na 3 kolory.



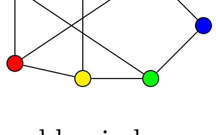


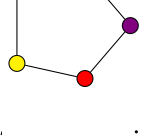
Jeśli mamy do dyspozycji $k \geq 3$ kolorów, problem k-kolorowania jest NP-zupełny. Oznacza to w szczególności, że nie znamy algorytmu, który stwierdza, czy graf G o n wierzchołkach da się poprawnie pokolorować na k kolorów, i jednocześnie działa w czasie wielomianowym względem n.

Może się jednak zdarzyć, że jesteśmy zainteresowani rozwiązaniem naszego problemu tylko dla takich grafów G, które posiadają określoną własność (np. są planarne lub każdy wierzchołek sąsiaduje z co najwyżej czterema innymi). Intuicja podpowada, że jeśli mamy dodatkowe informacje, wówczas być może da się rozwiązać nasz problem szybciej. W wielu przypadkach okazuje się to prawdą, a w skrajnych może się nawet okazać, że rozważany problem staje się trywialny. Na przykład, nie znamy algorytmu rozwiązującego problem 4-kolorowania w czasie wielomianowym dla wszystkich grafów G, ale gdy założymy, że G jest planarny, istnieje algorytm działający nawet szybciej niż wielomianowo – taki, który dla każdego G zwróci odpowiedź twierdzącą. Istotnie, na mocy twierdzenia o czterech barwach, każdy graf planarny można poprawnie pokolorować na cztery kolory.

Dlatego wszelkie twierdzenia charakteryzujące strukturę grafów pochodzących z pewnej ustalonej klasy są bardzo pożądane przez algorytmików – często pozwalają uprościć problemy i zaprojektować algorytmy, które działają szybciej, właśnie dzięki wykorzystaniu naszej dodatkowej wiedzy o grafie. Dodatkowo, z uwagi na swoją uniwersalność, mogą być używane do projektowania algorytmów dla problemów dużo ogólniejszych niż kolorowanie grafów.

W naszym projekcie będziemy się zajmować właśnie uogólnieniem problemu kolorowania – tak zwanymi *homomorfizmami* grafów. Niech G i H będą grafami. Powiemy że funkcja f przypisująca wierzchołkom grafu G wierzchołki grafu H jest homomorfizmem, jeśli z faktu, że wierzchołki u i v tworzą krawędź w G wynika, że $f(u)$ i $f(v)$ tworzą krawędź w H. Mniej formalnie, rozważmy przykład poniżej: przedstawiono na nim homomorfizm z grafu G (po lewej) w H (po prawej). Jeśli zinterpretujemy wierzchołki H jako kolory, wówczas każdej parze sąsiadów w G (po lewej) musimy przypisać parę kolorów sąsiadujących w H.





Dla ustalonego grafu H, w problemie homomorfizmu w H pytamy, czy istnieje homomorfizm z danego grafu G w H. Można zauważyć, że jeśli H jest grafem pełnym o k wierzchołkach, wówczas dostajemy problem równoważny problemowi k-kolorowania. Często nie znamy algorytmów, które rozwiązywałyby taki problem szybciej niż tzw. *brute force* (czyli wypisanie i sprawdzenie wszystkich możliwości), jeśli G może być dowolnym grafem. Dlatego właśnie chcemy skupić się na rozwiązywaniu problemu homomorfizmu w pewnych szczególnych klasach grafów – a dokładniej takich, które można zdefiniować poprzez zabronienie pewnych struktur.