

## KOMBINATORYKA ALGEBRAICZNA I GEOMETRIA W TEORII REPREZENTACJI

JACINTA TORRES

Kombinatoryka algebraiczna jest dziedziną w której algebraiczne metody wykorzystywane są do rozwiązywania problemów kombinatorycznych jak również idee kombinatoryczne stosowane są do badania obiektów algebraicznych. W niniejszym projekcie zamierzamy rozwiązać problemy z teorii reprezentacji, z natury algebraiczne, używając obiektów geometrycznych i stosując do nich techniki kombinatoryczne. Teoria reprezentacji jest dziedziną matematyki której celem jest badanie skomplikowanych obiektów algebraicznych przy użyciu znacznie prostszych obiektów takich jak skończenie wymiarowe przestrzenie wektorowe oraz ich symetrie.

1	3	5	7
2	6		
4	8		
9			

FIGURE 1. Standardowe tableau Younga w kształcie  $(4,2,2,1)$ .

Klasycznym kombinatorycznym obiektem używanym do zrozumienia obiektów algebraicznych jest standardowe tableau Younga, czyli tablica złożona z klatek wyrównanych do lewej strony i ułożonych w rzędy, jeden pod drugim, w sposób malejący; klatki te wypełnione są liczbami od 1 do  $n$  tak, że liczby te rosną w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Zapisując długości kolejnych wierszy w takim tableau tworzymy nierosnący ciąg dodatnich liczb całkowitych, zwany jego *kształtem*, i czasem nazywany również *partycją*. Skończenie wymiarowa *reprezentacja* grupy permutacji  $n$  znaków  $S_n$  jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową na której grupa  $S_n$  działa poprzez symetrie. Nie jest niespodzianką, że skończenie wymiarowe nierozkładalne reprezentacje  $S_n$ , rozpatrywane z dokładnością do izomorfizmu, są naturalnie indeksowane partycjami, których wiersze sumują się do  $n$ . Zadziwiające jest jednak to, że liczba standardowych tableau Younga ustalonego kształtu jest równa wymiarowi reprezentacji indeksowanej tym kształtem. Tableau Younga są również istotne w innych kontekstach: opisują charaktery reprezentacji ogólnej grupy liniowej, teorię przecięć Grassmannianów i rozmaitości Schuberta, oraz własności enumeratywne grafów zanurzonych na powierzchniach. Kombinatoryka tableau Younga i podobnych obiektów opisuje nie tylko skomplikowane obiekty z teorii reprezentacji, geometrii algebraicznej i kombinatoryce enumeratywnej. W istocie, swoim zasięgiem obejmują one również fizykę wysokiej energii, teorię prawdopodobieństwa, mechanikę statystyczną i wiele innych dziedzin intensywnie badanych.

W tym projekcie planujemy zastosować nowoczesne geometryczno-algebraiczne wyniki i kombinatoryczne metody w celu zbadania  $q$ -krotności reprezentacji grup reduktywnych, o których można myśleć jak o grupach ciągłych symetrii. Metodologia, która zamierzamy zastosować ma podobny charakter jak przykład opisany w poprzednim paragrafie. Zamierzamy zdefiniować statystyki na nieco bardziej ogólnych tableau co dostarczyłoby długo oczekiwanego wzoru na wspomniane wcześniej  $q$ -krotności. Ponadto dałoby to opis innych pięknych obiektów w teorii reprezentacji poprzez jawną kombinatoryczną konstrukcję tableau i pokrewnych struktur.