RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE NA OBSZARACH I ROZMAITOŚCIACH SUBANALITYCZNYCH

Większość matematycznych problemów pochodzących z inżynierii wiąże się z wyznaczaniem minimum funkcjonału $E(u)$, ogólnie energii, gdzie u jest funkcją określoną na obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Tego typu problemy zazwyczaj sprowadzają się do rozwiązania następującego eliptycznego równania różniczkowego cząstkowego:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{on } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

gdzie Δ oznacza operator Laplace $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$, $\partial\Omega$ brzeg otwartego podzbioru Ω, a f jest pewną zadaną funkcją. Ogólniej, typowym przykładem problemu pochodzącego z inżynierii jest badanie istnienia i jednoznaczności rozwiązania u równania:

$$Lu = f \text{ na } \Omega \tag{0.2}$$

spełniającego pewne warunki brzegowe, gdzie L jest eliptycznym operatorem różniczkowym, a Ω jest ograniczonym otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$.

W ostatnich siedmiu dekadach przytłaczająco wiele artykułów było publikowanych w celu wykazania istnienia oraz regularności rozwiązań przy założeniu, że L ma wystarczająco regularne współczynniki, funkcja f jest wystarczająco całkowalna oraz zbiór Ω ma odpowiednie własności. Tego typu rezultaty umożliwiają przybliżanie rozwiązania używając programów komputerowych.

Zadaniem tego projektu jest zrealizowanie teorii eliptycznych równań różniczkowych cząstkowych na obszarach subanalitycznych, których brzeg nie musi być lipschitzowski. Przypomnijmy, że zbiór subanalityczny $\mathbb{R}^n$ jest lokalnie rzutem zbioru zadanego przez równania i nierówności analityczne. W szczególności kategoria zbiorów subanalitycznych zawiera wszystkie zbiory semi-algebraiczne czyli te, które są zdefiniowane przez skończenie wiele warunków na znaki wielomianów.

Przykładem konkretnego matematycznego problemu, który stawiamy jest

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{if} \quad P_1(x) > 0, \ldots, P_k(x) > 0 \\ u(x) = g(x) & \text{if} \quad \exists\, i \leqslant k,\ P_i(x) = 0, \end{cases} \tag{0.3}$$

gdzie f i g są funkcjami odpowiednio całkowalnymi, a P_i są wielomianami n zmiennych. Tutaj przedstawiliśmy warunki brzegowe typu dirichletowskiego dla oparotora Laplace'a ale ostatecznym celem jest rozważanie wszystkich warunków brzegowych na obszarach subanalitycznych dla dowolnego (silnie) eliptycznego operatora różniczkowego mającego wystraczająco regularne współczynniki.

Wyraźną przewagą pracowania na obszarach zdefiniowanych przez nierówności wielomianowe czy analityczne jest to, że wielomianowe ograniczenia naturalnie pojawiają się w problemach inżynierii związanych ze sztuczną inteligencją czy matematyką finansową. Celem projektu jest zarówno rozwiązanie problemów typu (0.3), jak również dostarczenie kompletnych matematycznych narzędzi, które będą użyteczne w wielu innych sytuacjach. Oznacza to wprowadzenie w pełni teorii przestrzeni Sobolewa na obszarach subanalitycznych.