

Description For The General Public

Teoria mnogości to dział matematyki badający zbiory nieskończone. Jednym z jego głównych osiągnięć jest wyodrębnienie zasad podstawowych, *aksjomatów*, które łącznie opisują nasze zasadnicze intuicje na temat zbiorów. Te aksjomaty, znane jako aksjomaty teorii mnogości Zermela–Fraenkla z aksjomatem wyboru (ZFC) są podstawowymi zasadami orzekającymi, istnienie jakich zbiorów bazowych można przyjąć oraz jakie procedury można stosować, by uzyskać nowe zbiory z tych bazowych.

Jak się jednak okazuje, istnieją zdania o zbiorach takie, że ani tych tez, ani też ich negacji nie można zredukować logicznie do ZFC. Mówimy, że zdanie jest *nierozstrzygalne* (na gruncie ZFC) jeśli ani ono, ani jego negacja nie wynika logicznie z ZFC. To, że zdania nierozstrzygalne istnieją, stanowi treść słynnego twierdzenia Goedla o niezupełności, które głosi, że zdanie mówiące o niesprzeczności ZFC jest nierozstrzygalne. To zdanie jednak jest wysoce zawile i wykorzystuje zjawisko samoodniesienia. Choć to zaskakujące, istnieją też jednak bardzo proste zdania o bardzo prostych zbiorach, które są kompletnie nierozstrzygalne wewnątrz ZFC. Fakt ten stanowi duże wyzwanie dla badaczy teorii mnogości, zwłaszcza że nie potrafimy w praktyce wskazać żadnych kolejnych podstawowych zasad, które można by dodać do ZFC jako aksjomaty, aby rozstrzygnąć te proste pytania, na które powinniśmy umieć odpowiedzieć.

Program Goedla to kierunek badań teoriomnogościowych, którego cel stanowi znalezienie hierarchii naturalnych choć wysoce nieoczywistych, podstawowych zasad, które będą w stanie rozstrzygać stopniowo coraz więcej zdań nie rozstrzygniętych przez ZFC. Choć program ten odniósł ogromny sukces, uzyskano w jego ramach kilka takich hierarchii, które nie są wzajemnie logicznie spójne. Co więcej, niektóre z centralnych pytań teorii mnogości, które nie są rozstrzygalne, jak hipoteza kontinuum znajdują wzajemnie sprzeczne rozstrzygnięcia na gruncie tych hierarchii naturalnych aksjomatów nieskończoności. Program Steela to kierunek badań, którego celem jest unifikacja wszystkich tych naturalnych zasad teoriomnogościowych poprzez wskazanie wzajemnych biinterpretacji wspomnianych hierarchii. Biinterpretacje takie uzyskuje się poprzez konstrukcję kanonicznego modelu danej teorii wewnątrz modelu innej teorii.

Nadrzędnym celem proponowanego projektu jest osiągnięcie zamierzeń programu Steela dla dwóch najlepiej opisanych hierarchii, hierarchii aksjomatów forsingowych i hierarchii aksjomatów determinacji. Forsing to narzędzie służące do konstrukcji nowych modeli ZFC, wychodząc od danego modelu, poprzez dodanie do niego pojedynczego zbioru. Metoda ta została odkryta przez Paula Cohena w latach sześćdziesiątych i stanowi jedno z głównych narzędzi dowodzenia nierozstrzygalności zdań. Aksjomaty forsingowe mówią, że znaczne fragmenty takich nowo dodanych zbiorów można już znaleźć w wyjściowym modelu. Aksjomaty determinacji zaś to aksjomaty teoriogrowe, które postulują, że gry nieskończone są zdeterminowane. Gra jest zdeterminowana, jeśli któryś z graczy ma strategię wygrywającą.

Zarówno aksjomaty forsingowe, jak i aksjomaty determinacji rozstrzygają mnóstwo pytań, których nie da się rozstrzygnąć na gruncie ZFC. Są one jednak wzajemnie sprzeczne. Głównym celem tego projektu jest wykazanie, że zobowiązanie się do aksjomatów forsingowych w istocie pociąga za sobą zobowiązanie do aksjomatów determinacji i *vice versa*. Można to osiągnąć pokazując, że modele aksjomatów forsingowych da się znaleźć wewnątrz modeli determinacji i *vice versa*.