Nr rejestracyjny: 2023/50/E/ST1/00067; Kierownik projektu: dr hab. Tomasz Marcin Kania

Złożoność i opisywalność borelowska w analizie: od wolności do polskości

Tomasz Kania

Tak zwany paradoks Banacha–Tarskiego jest wysoce zaskakującym twierdzeniem, mówiącym, że kulę w przestrzeni trójwymiarowej można podzielić na pięć kawałków, które po odpowiednich obrotach i przesunięciach dadzą się złożyć w dwie identyczne kule z tą wyjściową. Pozorna paradoksalność w przypadku tego twierdzenia polega na tym, że kawałki te są w pewnym mocnym sensie *niekonstruowalne* (nie można przyporządkować im trójwymiarowej objętości), stąd, na przykład, nie można przeprowadzić ich *konstrukcji* w rzeczywistości fizycznej. Konstruowalność (nawet w bardziej restrykcyjnym sensie) leży w sercu działu matematyki, nazywanego opisową teorią mnogości, która stara się badać złożoność podzbiorów przestrzeni polskich, tj. obiektów matematycznych, które, mówiąc obrazowo, nie są bardziej skomplikowane niż zbiór liczb rzeczywistych. Badanie złożoności problemów dotyczących, na przykład, klasyfikacji obiektów matematycznych, pozwala oddzielić te które są nieuchwytne poprzez swoją inherentną niekonstruowalność od tych, które dodatkowo mają pewne dodatkowe pożądane własności, związane z takimi pojęciami jak obliczalność.

Punktami przestrzeni polskich mogą być obiekty matematyczne określonego typu, co pozwala rozważać problemy związane ze złożonością własności tychże. W analizie funkcjonalnej – dziale matematyki zajmującym się liniowymi i ciągłymi przekształceniami przestrzeni (na ogół o nieskończonym wymiarze) – idea ta została użyta w przypadku trzech fundamentalnych klas obiektów: ośrodkowych przestrzeni Banacha (najbardziej podstawowych obiektów z punktu widzenia analizy funkcjonalnej), ośrodkowych C*-algebr i algebr von Neumanna dających się reprezentować na ośrodkowych przestrzeniach Hilberta (te dwie ostatnie klasy obiektów były wprowadzone celem formalizacji mechaniki kwantowej). W przypadku C*-algebr istnieje w literaturze kilka podejść do budowy przestrzeni polskiej złożonych z tychże, jednak po dziś dzień nie wiadomo czy złożoności danych problemów opisywanych w różnych przestrzeniach polskich od nich zależą bądź nie. Wszystkie wspomniane tutaj konstrukcje sprowadzają się do zauważenia, że dane obiekty można zanurzyć w jeden większy (uniwersalny) obiekt, co staje się w naturalny sposób podwaliną dalszej konstrukcji (dla ośrodkowych przestrzeni Banacha możliwość ta wynika z twierdzenia udowodnionego przez Godefroy'a i Saint-Raymonda z 2018). Podejście to opiera się jednak takim klasom obiektów, które nie mają naturalnego obiektu uniwersalnego w tym sensie, do których zaliczają się (ośrodkowe) algebry Banacha (przestrzenie Banacha z określonym mnożeniem, które jest ciągłe).

Zasadniczym celem projektu jest budowa zunikowanego podejścia do konstrukcji takich przestrzeni polskich złożonych z obiektów matematycznych, które będzie oparte na dokładnie przeciwnym podejściu. Zamiast oczekiwać istnienia obiektu, który jest uniwersalny ze względu na włożenia będziemy rozważać dostatecznie duże tzw. obiekty wolne w danych klasach obiektów, które cechują się tym, że dają się *zrzutować* na wszystkie obiekty z rozważanej klasy. Centralną hipotezą dotyczącą takiego podejścia, poza pewnym walorem unifikacyjnym dla poddziedzin analizy funkcjonalnej, jest potencjalna większa prostota w osiąganiu nowych wyników sprowadzalnych do opisywalności bądź konstruowalności zbiorów obiektów mających określone własności, co możliwie zaowocuje efektywniejszą klasyfikacją (bądź wykaże jej niemożność) różnorakich struktur matematycznych pojawiających się w analizie matematycznej, ale również w innych działach matematyki.