Od grafów gęstych do rzadkich i z powrotem

Paweł Rzążewski

Już od lat siedemdziesiątych dwudziestego wieku wiemy, że istnieje wiele naturalnych problemów obliczeniowych, których (prawdopodobnie) nigdy nie będziemy w stanie rozwiązać efektywnie. Przykładem takiego problemu jest Największy Zbiór Niezależny: dla danego grafu należy znaleźć największy zbiór parami niesąsiadujących wierzchołków. Prostota definicji problemu jest zwodnicza: o ile nie wydarzy się coś bardzo niespodziewanego, nie możemy liczyć na szybkie (a nawet „istotnie szybsze niż brute-force") algorytmy, które rozwiążą ten problem, choćby w przybliżeniu. Takie algorytmy mogą jednak istnieć, jeśli ogranicznymy możliwe grafy wejściowe (instancje) to pewnej rodziny (zwanej klasą).

Badanie problemów obliczeniowych w szczególnych klasach grafów jest bardzo aktywnym kierunkiem badań w ostatnich dziesięcioleciach. Często w tym, a także w innych kontekstach, spotykamy pewną dualność między grafami rzadkimi i gęstymi. Istnieje wiele rozsądnych definicji grafów rzadkich, ale ogólnie[1] klasy grafów rzadkich uważane są za dobrze zrozumiane. Często mają one silne własności strukturalne, które pozwalają na przykład na ograniczenie liczby chromatycznej. W wielu przypadkach własności te mogą być też wykorzystane algorytmicznie. Liczne klasyczne problemy obliczeniowe, trudne w ogólności, stają się istotnie łatwiejsze w klasach grafów rzadkich – tj. istnieją dla nich szybkie algorytmy, przynajmniej aproksymacyjne. Z drugiej strony, grafy gęste uważane są za strukturalnie skomplikowane. Co więcej, z perspektywy obliczeniowej, często dostarczają nam wyników negatywnych.

Okazuje się jednak, że nawet pośród klas grafów gęstych można znaleźć wiele silnie ustrukturyzowanych przykładów. Intuicyjnie, będziemy zainteresowani klasami grafów, które **„tylko udają, że są gęste"**. Nieco bardziej formalnie, są klasy (potencjalnie gęstych) grafów, w których nadal można doszukać się pewnej rzadkiej struktury, niekoniecznie widocznej od razu. W projekcie będziemy badać, w jaki sposób wyniki otrzymane dla klas grafów rzadkich mogą być uogólnione do takich „strukturalnie rzadkich" klas. W szczególności jesteśmy zainteresowani transferem narzędzi z jednego świata do drugiego.

Co więcej, będziemy też badać klasy grafów, które **„tylko udają, że są rzadkie"**. Dokładniej, zajmiemy się (potencjalnie rzadkimi) grafami z ustalonym porządkiem na wierzchołkach. Relacja porządku jest gęsta, ale nadal niezbyt skomplikowana. Dzięki pierwszej z tych własności, nawet proste rodziny grafów (np. skojarzenia) są dość bogate w uporządkowanym świecie. Dzięki drugiej własności, nadal możemy liczyć na ciekawe własności strukturalne i algorytmiczne.

[1] bardzo upraszczając