

Pomiary kwantowe są kluczowymi narzędziami do uzyskiwania informacji o stanach kwantowych. W kwantowej teorii informacji operatory pomiaru są reprezentowane przez dodatnie miary wartościowane operatorami (POVM), czyli zbiory operatorów półdodatnio określonych, które sumują się do operatora identycznościowego. Szczególnie przydatne są pomiary informacyjnie kompletne, pozwalające na wykonanie pełnej tomografii stanu kwantowego (uzyskanie kompletnej wiedzy o stanie). Wśród najpopularniejszych wysoce symetrycznych operatorów pomiaru wyróżnia się dwie klasy pomiarów projektorowych. Symetryczne, informacyjnie kompletne (SIC) POVM składają się z takich operatorów, dla których iloczyn Hilberta-Schmidta między różnymi parami zawsze zwraca tę samą wartość. Bazy wzajemnie nieobciążone (MUB) tworzą maksymalne zbiory projektorów ortogonalnych, gdzie prawdopodobieństwo przejścia między dwoma projektorami na wektory różnych baz jest stałe. Co ciekawe, SIC POVM i MUB są często analizowane w tym samym kontekście. Oba te obiekty są przykładami zespolonych konstrukcji projektorowych (*complex projective designs*), odpowiadają płaszczyznom afinicznym (ale z zamienionymi rolami punktów i linii), są operacyjnie powiązane przez jednoczesną mierzalność i znajdują ważne zastosowania w tych samych zadaniach kwantowego przetwarzania informacji. Przykłady ich implementacji doświadczalnych obejmują szacowanie stanów kwantowych, dystrybucję klucza kwantowego, wykrywanie splątania, kwantowe protokoły komunikacyjne i teleportację kwantową. Wszystko wskazuje na to, że te dwa obiekty matematyczne są ze sobą ściśle powiązane.

Celem mojego projektu jest definicja, analiza i konstrukcja operatorów pomiaru o słabszych więzach symetrii, ale analogicznych właściwościach i zastosowaniach. We wstępnych wynikach pokazuję, że SIC POVM i MUB są szczególnymi przypadkami bardziej ogólnej koncepcji: równolicznych zbiorów wzajemnie nieobciążonych pomiarów symetrycznych, które są informacyjnie kompletne. Dalsza analiza ujawnia dwie dodatkowe klasy operatorów pomiaru w każdym wymiarze skończonym. Co ciekawe, parametry można dobrać w taki sposób, że operatory pomiaru są projektorami, ale nigdy rzędu pierwszego. W następnym kroku wprowadzam zbiory nierównolicznych POVM, gdzie nietrywialne rodziny operatorów pomiaru są obserwowane już na poziomie kubitów. Ponadto informacyjnie kompletne zbiory tworzą konstrukcje koniczne (*conical designs*, uogólnienie zespolonych konstrukcji projektorowych na operatory nieprojektorowe) tylko wtedy, gdy spełniają pewne rygorystyczne warunki. W ramach projektu rozważane będą alternatywne uogólnienia pomiarów symetrycznych. Pozbycie się pewnych ograniczeń, takich jak informacyjna kompletność czy stały ślad operatorów, pozwala na zdefiniowanie rodzin operatorów pomiaru, których elementy spełniają mniej restrykcyjne warunki symetrii. Może to ujawnić szczególne właściwości algebraiczne, które pozostawały do tej pory nieobserwowalne. Co więcej, wstępne badania sugerują, że mniej symetryczne pomiary mogą potencjalnie znaleźć równie szerokie zastosowania teoretyczne i eksperymentalne, jak maksymalnie zsynchronizowane SIC POVM, MUB i ich nieprojektorowe uogólnienia.

Pobocznym celem projektu jest odpowiedź na pytanie, czy istnieją kompletne zbiory MUB i SIC POVM w dowolnym wymiarze skończonym. Znalezienie dodatkowych analogii między strukturami tych obiektów mogłoby być pomocne w ustaleniu związku między ich sposobami konstrukcji. Wiadomo, że w wymiarach złożonych istnieją SIC POVM, ale dla MUB pytanie pozostaje otwarte. Z drugiej strony znane są metody konstrukcji maksymalnych zbiorów MUB w dowolnych wymiarach pierwszych i ich potęgach, co obecnie pozostaje nieosiągalne dla SIC POVM. Dlatego pierwszym krokiem jest ustalenie, czy istnieje siedem MUB w wymiarze sześć lub czy istnieją SIC POVM w (najlepiej nieskończonym) ciągu wymiarów. Wspomniane problemy otwarte są popularne zarówno wśród matematyków, jak i fizyków, ponieważ są proste do sformułowania, ale technicznie nietrywialne.

Podczas moich badań planuję wykorzystywać narzędzia matematyczne z dziedzin algebry liniowej, analizy funkcjonalnej i teorii reprezentacji, aby zapewnić satysfakcjonujący opis operatorów pomiaru oraz ich właściwości. Rozważając możliwe zastosowania operatorów pomiaru w informatyce kwantowej, zamierzam wykorzystać zaawansowane metody fizyki teoretycznej i matematycznej. Oczekuję, że niniejszy projekt otworzy nowe kierunki badań oraz pomoże sformułować nowe twierdzenia matematyczne.