Nierefleksywne przestrzenie funkcyjne: podejście fourierowskie vs martyngałowe

Analiza harmoniczna powstała jako narzędzie do badania zjawisk fizycznych posiadających naturę falową. Na przestrzeni kilku wieków okazała się niezwykle skuteczna w ich badaniu. W tym czasie bardzo się rozwinęła stając się w zasadzie samodzielną gałęzią matematyki. Nie sposób wymienić wszystkich, często nieoczekiwanych, zastosowań analizy fourierowskiej w innych działach matematyki. Dość wspomnieć o przepięknych rezultatach teorii liczb, addytywnej kombinatoryki, teorii prawdopodobieństwa, równań różniczkowych, układów dynamicznych, teorii potencjału, geometrii przestrzeni nieskończenie wymiarowych, a nawet topologii. Szczególny rozwój analizy harmonicznej nastąpił w dwudziestym wieku, między innymi za sprawą teorii operatorów singularnych zwanych operatorami Calderona - Zygmunda. Są to naturalne uogólnienia klasycznych operatorów liniowych związanych z przestrzeniami funkcji analitycznych. Dzisiejsza wiedza na ich temat jest olbrzymia, a ich zastosowania wszechstronne.

Teoria martyngałów stanowi jedną z centralnych gałęzi teorii prawdopodobieństwa. Wyrosła jako teoretyczna podstawa w analizie strategii teorii gier. Na przestrzeni lat okazało się, że jest to bardzo użyteczna metoda w szeroko rozumianej analizie - w szczególności w analizie harmonicznej i przy konstruowaniu rozwiązań równań różniczkowych. Sztandarowym przykładem martyngałów są procesy Wienera, znane szerzej jako ruchy Browna. Znalazły one szerokie zastosowanie, nie tylko w matematyce ale również w licznych teoriach fizycznych, a nawet w naukach społecznych i ekonomicznych. Klasyczna teoria martyngałów jest użytecznym narzędziem w kontekście badania norm wyrosłych z przestrzeni funkcji całkowalnych. Niestety ta teoria jest znacznie mniej skuteczna w kontekście badania osobliwości miar pojawiających się jako rozwiązania równań różniczkowych oraz ich naturalnych uogólnień.

W naszych badaniach zamierzamy użyć współczesnej teorii martyngałów do badania własności przestrzeni Banacha funkcji różniczkowalnych. Przestrzenie Banacha funkcji różniczkowalnych zajmują centralną rolę w matematyce. Mają kluczowe znaczenie w teorii równań różniczkowych, układach dynamicznych, teorii prawdopodobieństwa itd. Wewnętrzna struktura tych przestrzeni, szczególnie w nierefleksywnym przypadku, pozostaje niezwykle tajemnicza. Szczególnie w porównaniu z naszą o wiele bogatszą wiedzą o przestrzeniach funkcji analitycznych.

Jednym z celów naszego projektu jest poszerzenie zasobu wiedzy na temat struktury nierefleksywnych przestrzeni Banacha funkcji różniczkowalnych oraz opis singularności ich elementów. W tym celu zamierzamy rozwinąć i wykorzystać narzędzia współczesnej teorii martyngałów do badania osobliwości funkcji oraz ich uogólnień. Chcemy zbadać ich związek włożeniami przestrzeni Banacha oraz operatorami śladu. Co więcej zamierzamy wykorzystać podobieństwa i różnice pomiędzy teorią przestrzeni funkcji gładkich, a teorią funkcji analitycznych.

Analiza harmoniczna operatorów w przestrzeniach nierefleksywnych jest nie tylko ważna i niezwykle potrzebna w zastosowaniach, ale jest zadaniem pełnym matematycznego piękna i głębokich, często nieoczekiwanych powiązań i jako taka z pewnością powinna być intensywnie rozwijana.